

# על פרדוקסים ומשמעותם

מאת: אילן עמית חיים גייפמן

מחשבות 52 | נובמבר 1983

## תוכן העניינים

- השקרא ובוחן הפתע
- תורת הרמות
- הפרדוקס כשוטר
- משפט גידל ובעיית היישום העצמי
- התורות המזרחיות והפילוסופיה הדיאלקטית

## הקדמה:

"אל תקרא את הדברים האלה!" כדי לקיים הוראה זו צריך קודם כל לקרוא אותה. כלומר, כדי לקיים אותה, צריך לעבור עליה. זוהי, איפוא, הוראה פרדוקסאלית, שיש בה סתירה פנימית. משתמשים בה כתחבולת-פירסומת: פתיחה לדברים שרוצים שיקראו אותם דווקא.

פרדוקסים הם גם מקור לחידות ולשעשועים: "ספר הכפר מספר אן ורק את כל אנשי הכפר שאינם מסתפרים בעצמם. האם הוא מסופר את עצמו או לא?". אם הוא מספר את עצמו, הרי הוא נמנה עם אנשי הכפר המסתפרים בעצמם, ועל כן, כיוון שהוא מספר את אלה שאינם מסתפרים בעצמם, אין הוא מספר את עצמו. וכן להיפך: אם אינו מספר את עצמו, הוא נמנה עם אלה שספר הכפר מספר אותם, ולכן הוא מספר את עצמו. ספר מוזר זה מספר, איפוא, את עצמו, אם ורק אם אינו מספר את עצמו. האם פרדוקסים הם יותר משעשועי-בידור ותחבולות-פירסומת?

הפילוסוף היווני זֶנוֹן הטיל ספק באפשרות התנועה. כאשר חץ עף באוויר, הוא נמצא בכל רגע במצב מסוים של מנוחה. מתי, איפוא, נע

החץ? בימי-הביניים התלבטו בשאלה האם האל הכל-יכול, יכול לברוא סלע כה כבד שאין ביכולתו להרימו.

בסוף המאה ה-19 יצר הלוגיקן והמתימטיקאי הגרמני, גוטלוב פרגה (Frege) תחשיב לוגי שהרחיב באופן משמעותי את הלוגיקה של אריסטו. פרגה השתמש בו כדי לבסס את האריתמטיקה (תורת החשבון במובנה הרחב) על הלוגיקה, ולהקנות לה בכך בסיס מוצק ונעדר סתירות. גישה זו משמשת כיום בסיס ללוגיקה ולמתימטיקה כולה. ואולם, ב-1903 ניסח הפילוסוף והלוגיקן הבריטי, ברטראנד ראסל (Russell), שהיה אז צעיר לימים, פרדוקס הניתן לביטוי במערכת המושגים של פרגה.

פרגה קבע, שחייבת להיות התאמה גמורה בין תכונות לבין קבוצות העצמים בעלי אותן תכונות. "להיות אדום" פירושו להיות חבר בקבוצת כל העצמים האדומים. ו"להיות קבוצה" פירושו להיות חבר בקבוצת כל הקבוצות.

ראסל הבחין, שקיימות קבוצות המכילות את עצמן, כגון "קבוצת כל הקבוצות", שהיא עצמה קבוצה, ולכן היא אבר של עצמה; או "קבוצת כל המושגים בשפה העברית", שהיא עצמה מושג בשפה העברית. מצד שני, רובן המכריע של הקבוצות המוכרות לנו, אינו ממין זה. למשל, "קבוצת המספרים הטבעיים", אינה בעצמה מספר טבעי וכן — "קבוצת כל האנשים הנמצאים בחדר זה", אינה בעצמה אדם הנמצא בחדר זה. ראסל כינה את הקבוצות מן הסוג השני, שאינן מכילות את עצמן כאבר, בשם "נורמליות". על פי שיטתו של פרגה, להיות קבוצה נורמלית פירושו, להיות חבר בקבוצת כל הקבוצות הנורמליות. ראסל שאל, האם "קבוצת כל הקבוצות הנורמליות" היא עצמה נורמלית, או לא. אם "קבוצת כל הקבוצות הנורמליות" היא נורמלית, הרי היא אבר של עצמה. אבל קבוצה שהיא אבר של עצמה אינה נורמלית, ואילו אם "קבוצת כל הקבוצות הנורמליות" אינה נורמלית, אזי אינה אבר של עצמה, ואם כך היא נורמלית. והרי פרדוקס.

פרגה הביא את הפרדוקס של ראסל בנספח לחיבורו על חוקי היסוד של האריתמטיקה. היה ברור שמשוואתו אינו כשורה במבנה העיוני שבנה, אם אפשר לגזור מתוכו פרדוקס. פרגה היה בטוח, שדרישתו — לבסס את האריתמטיקה על הלוגיקה — נכונה, אך לא ידע כיצד ליישב את הפרדוקס של ראסל.

הדבר נעשה מאוחר יותר, ע"י ראסל עצמו וע"י מתימטיקאים ולוגיקנים אחרים. כיום ברור, שלפרדוקס זה היה תפקיד חיוני וחיובי בהתפתחות של הלוגיקה הפורמלית ושל המתימטיקה.

חיים גייפמן, פרופ' ללוגיקה מתימטית ולפילוסופיה של המדע באוניברסיטה העברית בירושלים, כתב באחרונה מאמר מקיף על הפרדוקסים בלוגיקה, בתורת הלשון ובתורת-ההכרה. בשיחה עם פרופ' גייפמן נדונים כמה מסוגי הפרדוקסים ודרכי יישובם; נדונה בעיית היישוב העצמי, המשמשת יסוד בכמה מהפרדוקסים הידועים והמופיעה גם בטכנולוגיה של מחשבים ונדון תפקידם של הפרדוקסים בהתפתחות המחשבה האירופית ובמחשבת המזרח הרחוק.

פרופ' חיים גייפמן

ספר הכפר מספר אך ורק את כל אנשי הכפר שאינם מסתפרים בעצמם. האם הוא מספר את עצמו?

## השקרן ובוחן הפתע

**מ:** אתה דן במאמרך בפרדוקסים לוגיים, כגון זה של ראסל, ובפרדוקסים סמאנטיים (בעלי אופי לשוני). התוכל לתת דוגמה של פרדוקס סמאנטי?

**ג:** פרדוקס סמאנטי עתיק הוא פרדוקס השקרן, המופיע כבר אצל היוונים. בברית-החדשה, באגרת פאולוס אל טיטוס, מסופר על הנביא אפימנדס מכרתים, שאמר, שכל בני כרתים זוללים וסובאים, שקרנים ורמאים. מאחר שהוא עצמו בן האי הרי גם הוא שקרן, ולכן דבריו על בני כרתים (ועל עצמו) אינם דברי אמת. אם כך, אין זה נכון שהוא עצמו וכל אנשי כרתים שקרנים, וכו' וכו'. גירסה פשוטה של פרדוקס השקרן היא: "הפסוק הנוכחי הוא שקרי" לגבי פסוק המכריז על עצמו שהוא שקרי, אי-אפשר לקבוע אם הוא אמיתי (ולכן שקרי, כהכרזתו), או שקרי (ולכן אמיתי, בניגוד להכרזתו). אם יש גירסה אחרת: "הפסוק הבא הוא אמת; הפסוק הקודם הוא שקרי". אם הפסוק הראשון אמיתי, הרי השני אמיתי ולכן הראשון שקרי (כהכרזת השני), וזוהי סתירה, סתירה דומה מתקבלת גם אם מניחים שהפסוק הראשון שקרי.

## זנון

החץ הנמצא בחלל שווה לעצמו בכל רגע של מעופו ולכן גם במשך כל עת מעופו. לפיכך החץ העף נמצא במנוחה.

**מ:** במאמרך אתה מציע דגם כללי לפרדוקסים הלוגיים-סמאנטיים בן שני צעדים: בצעד הראשון בונים עצם העומד ביחס מסויים לאברי מערכת נתונה. בצעד השני כופים על העצם להכנס לתוך המערכת. אז חל עליו אותו יחס החל על כלל אברי המערכת, וכך נוצר הפרדוקס. למשל, בפרדוקס השקרן משתמשים במונחים "פסוק" ו"שקרי", שהם מונחים סמאנטיים, המשמשים לדיון על השפה, כדי לבנות מהם פסוק חדש, פסוקו של השקרן. זהו העצם של הצעד הראשון במודל. אבל כיוון שהוא פסוק ככל הפסוקים, הוא אנוס להכנס למערכת הלשונית הרגילה, להמצא בתוך השפה, שבה כל פסוק הוא או אמיתי או שקרי. זהו השני של המודל ובו מתברר שהפסוק פרדוקסאלי.

האם זהו, לדעתך, דגם לכל הפרדוקסים?

**ג:** לא, אינני יודע מה פירוש "כל הפרדוקסים". יש פרדוקסים של האין-סוף, שאינם מטיפוס זה. אני אומר, שזהו דגם מאפיין לפרדוקסים החשובים מהקבוצה הלוגית-סמאנטית.

**מ:** במאמרך אתה עוסק בפרדוקס לא מוכר של פרופ' גדעון שוורץ שני שחקנים משחקים דמקה, ועל-פי ההסכם משלם א' ל-ב' 100 דולר כל פעם ש-ב' זוכה (או אינו מפסיד) במישחק, ו-ב' משלם ל-א' 100 דולר אם א' זוכה, א' מודיע ל-ב', שהחליט לשלם לו 1000 דולר מחוץ להסכם על 100 הדולר, אם יתנהג בצורה בלתי-רציונלית. מניחים ש-א' הוא לוגיקן מקצועי או שיש ביכולתו לקבל חוות-דעת של לוגיקנים מיקצועיים, כדי לקבוע אם ב' פעל בצורה רציונלית או לא, אם ינסה ב' להפסיד במשחק, הרי שבדרך זו הוא פועל כדי לזכות ב-1000 הדולר, ועל כן זו פעולה רציונלית. אבל, אם בעקבות השיקול הזה ב' מנסה לזכות במשחק, על-מנת שזה יחשב התנהגות לא רציונלית, הרי שהתנהגות זו, שמטרתה לזכות ב-1000 הדולר, הופכת להיות רציונלית! המסקנה היא, שבתנאים הנתונים אין משמעות ל"התנהגות רציונלית" ו"לא רציונלית", ב' יכול להתעלם

מהודעתו של א', לשחק ולזכות ב-100 הדולר המקוריים ובפני א' תעמוד אז בעיה בלתי ניתנת להכרעה — אם לשלם לו את 1000 הדולר הנוספים, או לא.

**מ:** זהו פרדוקס אפיסטמי. מה ההבדל המהותי בין פרדוקסים אפיסטמיים לבין הלוגיים-סמאנטיים?

**ג:** בפרדוקסים הלוגיים-סמאנטיים מתקבלת הסתירה מתוך נסיון לבנות מערכת מופשטת, שבה אתה מתאר את העולם, את המציאות. הפרדוקסים האפיסטמיים הם, בעצם, ניסויים מחשבתיים, שבהם מוגדרים תנאים (בדרך כלל במצבי אי-ודאות) ומישהו ניצב בפני בעיית החלטה, שאי-אפשר להתירה, משום שכל צעד שיעשה יוליך לנזק עצמי או למעגליות. כך נוצרת דילמה, שלא ברור כיצד להחליץ ממנה: לכל דרך-פעולה יש נימוק-נגדי, המראה מדוע לא כדאי לבחור בה.

**מ:** נדמה לי שקיים הבדל מהותי נוסף: הסתירה בפרדוקסים הלוגיים-סמאנטיים נוגעת ליסודות המחשבה ולכן איננו יכולים להשלים עימה, כי היא פוגעת, כביכול, ביסודות הכרתנו. לעומת זאת, אנו רגילים לעובדה שבמציאות יש דילמות שאינן ניתנות לפתרון.

**ג:** להיפך. מבחינה מסויימת הפרדוקסים האפיסטמיים חמורים יותר. בתחום הלוגי-סמאנטי אפשר להסתדר ע"י כך שמטילים מגבלות על המערכת הסמאנטית שממנה יצאנו, והמערכת שהביאה לפרדוקס. בניסויים המחשבתיים אי-אפשר לשנות את התנאים, וחוסר-האפשרות לפעול מעמיד בספק את המושגים של שיקול-דעת ורציונליות.

הפרדוקסים הלוגיים-סמאנטיים מעניינים לוגיקנים ומתימטיקאים העוסקים ביסודות המתימטיקה. אבל כשמדובר בפרדוקסים אפיסטמיים אפשר להעמיד כל אדם בפני הבעיות שהם מציגים.

**מ:** התוכל להביא דוגמה נוספת של ניסוי מחשבתי?

**ג:** מורה נכנס לכיתה ומודיע על בוחן-פתע, שיתקיים באחד מימי השבוע הבא, ומצהיר שהתלמידים לא יוכלו לדעת מראש באיזה יום ינתן הבוחן. השאלה היא, אם התלמידים מסוגלים ע"י ניתוח לוגי לדעת מתי ינתן הבוחן. אם לא ינתן בימים א' עד ה' — יידעו

התלמידים שהבוחן ינתן ביום ו', שהוא היום היחיד שנותר. כלומר, הם יידעו מראש מתי יהיה הבוחן. לכן הבוחן לא ינתן ביום ו', אלא באחד הימים א' עד ה'. שיקול דומה מראה אז, שאם הבוחן לא ינתן בימים א' עד ד', יידעו התלמידים שהוא ינתן ביום ה', ואז, שוב אין זה בוחן פתע. אפשר להמשיך כך ולהגיע למסקנה, שאי-אפשר לתת בוחן-פתע באף אחד מימי השבוע, שכן מועד קיומו לא יהיה מפתיע. ועם זאת, בפועל המורה ערך את הבוחן ביום ד' והתברר שהתלמידים בכל זאת הופתעו.

**מ:** כיצד מיישבים פרדוקס זה? האם המושג "בוחן-פתע", על פי הכללים הנ"ל, מכיל סתירה פנימית, או שיש טעות בניתוח הלוגי של התלמידים?

**ג:** יש כל מיני גישות לפרדוקס זה וכדי להבהיר אותו, צריך קודם להבהיר ביתר דיוק מה פירוש הדבר, שהתלמידים יהיו מופתעים, ומה משמעות "לדעת מראש" מתי ינתן הבוחן. לא נוכל כאן להכנס לפרטי הנושא. דעתי היא, שיש טעות בשיקול-דעת של התלמידים.

המורה אמר להם שני דברים. א. שהבוחן יינתן להם באחד מימי השבוע הבא; ב. שהם לא יוכלו לדעת מראש באיזה יום ינתן הבוחן.

התלמידים מקבלים את שני הפסוקים הללו כאמת מוחלטת, ומכאן נוצרת הסתירה. למעשה, שני הפסוקים אינם במעמד דומה. הראשון (פסוק א') הוא דבר שהמורה יכול להתחייב עליו. אפשר גם לבנות מערכת "אוטומטית", שתיתן את הבוחן ביום ו', אם הוא לא ניתן קודם. לעומת זאת, אין המורה יכול להתחייב על פסוק ב'. זוהי רק הנחה שהמורה והתלמידים יכולים להניח בסבירות גבוהה, והסבירות ניתנת אפילו להימדד (היא גבוהה יותר ככל שמספר הימים בהם רשאי המורה לתת את הבוחן, גדול יותר). אבל, אין כאן בטחון גמור. אולי יש בין התלמידים קורא מחשבות? כדי להתגבר על כך יכול המורה להטיל את קביעת יום המבחן על מנגנון אוטומטי המשתמש בהטלת קוביה. אם הקוביה תראה 6, לא יוכל המורה לקיים את הבטחתו לגבי ההפתעה שבכוחן וההסתברות לכך היא 1:6. הוא יכול, כמובן, לכוון את המנגנון מראש, כך שאם התוצאה תהיה 6, ינתן הבוחן ביום א'. אין הוא יכול למנוע שמישהו ינחש זאת ויבין, שלמעשה המנגנון יגריל רק בין הימים א'-ה', ולכן לא יופתע אם

הבוחן ינתן ביום ה', וכו' וכו'. אם יניחו התלמידים, שהפסוק השני של המורה הוא רק בעל סבירות גבוהה ואינו דבר ודאי, תעלם הסתירה.

**מ:** הפרדוקסים מתעוררים לא רק בהקשר של טענות אמיתיות ושקריות, אלא גם בהקשר הנורמטיבי של ציוויים, שאפשר לעבור עליהם או לקיימם. למשל, במקום הגירסה השניה של פרדוקס השקרן, נוכל לנסח את שני הציוויים הבאים. ציווי א': "קיים את ציווי ב'". ציווי ב': "הפר את ציווי א'". לכאורה, יש כאן אנלוגיה גמורה, אלא שבהקשר הנורמטיבי לא ברור אם בכלל ציוו עלינו משהו.

**ג:** נכון, זה אנלוגי לחלוטין מבחינת המבנה לפרדוקס השקרן, וכשם שבפרדוקס השקרן לא נאמר, בעצם, שום דבר, אתה יכול לטעון, שגם כאן לא ציוו עליך, בעצם, שום דבר.

**מ:** אולם, לגבי ציוויים אנו נוטים יותר לקבל את האפשרות השלישית, כלומר, שאפשר לא לקיים את הציווי ולא לעבור עליו, אלא לא לעשות שום דבר — מה שידוע כ"פער". בעניין אמת ושקר אנו פחות מוכנים לפער כזה.

**ג:** זה נכון, אבל גם כאן קיימת אפשרות של "פרדוקס השקרן המחוזק", האומרת, שאם לא עשית שום דבר, הרי גם אז עברת על הציווי, כיוון שצוית לעשות משהו, ולא לא לעשות דבר. לדעתי, תצטרך להכניס גם כאן — כפי שנראה להלן לגבי פרדוקס השקרן — רמות, ולנתח באיזו רמה אתה מקיים את הציווי, ובאיזו רמה אתה מפר אותו.

## תורת הרמות

**מ:** הרבה פרדוקסים ניתן ליישב ע"י כך שמבחינים בין רמות. למשל, כדי להחלץ מהפרדוקס של ראסל קובעים, שעצמים סתם הם ברמה 0; קבוצות של עצמים ברמה 0 הן ברמה 1, וקבוצות של קבוצות של עצמים הן ברמה 2 וכך הלאה. ואז — אם קבוצות נמצאות ברמה כלשהי, הרי שקבוצת כל הקבוצות האלה נמצאת ברמה גבוהה יותר, ואינה יכולה להכיל את עצמה כאבר. היא מכילה רק אברים מרמה יותר נמוכה. באופן דומה פותרים את פרדוקס השקרן, ע"י כך שקובעים, שפסוקים רגילים יהיו אמיתיים או שקריים ברמה 0,

ופסוקים הדנים בפסוקים אלה, יהיו אמיתיים או שקריים ברמה 1, וכן הלאה.

פסוקו של השקרן נמצא, כביכול, בבת-אחת בכל הרמות, משום שהוא פסוק הדין בעצמו, ולכן ברגע שהוא נמצא ברמה מסויימת, הוא מגיע גם לרמה הגבוהה יותר, הדנה בה. אם הפסוק של השקרן הוא אמיתי ברמה 0, הרי הוא שקרי ברמה 1 (לפי טענתו), ולכן אמיתי ברמה 2, שקרי ברמה 3, וכן הלאה. כלומר, ערך-האמת של הפסוק מתחלף בכל רמה ואינו מתייצב. משום כך הוא עושה רושם של פסוק פרדוקסאלי.

**ג:** הפתרון האלגנטי במתימטיקה הוא בכך שבונים מערכת פורמלית, שכביכול אין בה רמות, ואחר-כך מראים שהרמות מופיעות בתור מסקנה.

**מ:** אולם, יש הבדל בין הפרדוקס של ראסל לבין פרדוקס השקרן. הפרדוקס של ראסל מופיע בתוך מערכת פורמלית, שאפשר לשנות אותה בעזרת תורת רמות ולמנוע את הפרדוקס. ואילו פרדוקס השקרן מופיע בשפה הטבעית, והשאלה היא, באיזה מובן אפשר להכניס בה תורת רמות, האם זוהי דרך לאינטרפרטציה של השפה הטבעית, או שהיא נסיון לשפר את השפה הטבעית, ע"י כך שמכריחים אותה להישמע לתורת רמות, כדי להחליץ מן הפרדוקס?

**ג:** אי-אפשר לכפות על השפה הטבעית שום דבר. השפה הטבעית היא יצור חי. לא חשוב כמה מאמרים פילוסופיים יכתבו — השפה הטבעית תמשיך להתנהג כפי שהיא מתנהגת. אי-אפשר לכפות נורמות עליה, אלא רק לתת לה אינטרפרטציה. השאלה היא, עד כמה באמת יש צורך ברמות כדי לפרש פסוקים בשפה הטבעית. מתברר שבדרך כלל לא צריך רמות. יש נטיה מאד מוגזמת לראות בפרדוקסים הסמאנטיים בשפה הטבעית, בעיית יסוד של מושג האמת בה. זה לא נכון, כי הפרדוקסים הסמאנטיים נוצרים בהקשרים שוליים ולא הם המפריעים לאנשים להשתמש באורח מדוייק בשפה הטבעית. בעיית האמת בשפה הטבעית איננה נעוצה בזה.

אם מנסים ליצור תורת אמת בשפה הטבעית, באופן אנלוגי לשפה הפורמלית, ומתעקשים שתהיה הגדרה חד-משמעית למושג האמת, נתקלים בקשיים, גם אז, כמה רמות דרושות בשפה הטבעית כדי



לפתור קשיים אלה? אני חושב שברוב המקרים מספיקות רמה אחת או שתיים. יש סיטואציות טבעיות, הכופות עליך להשתמש ביותר מרמה אחת, ולכן אתה יכול לומר שעקרונית יש בשפה הטבעית רמות-אמת.

**מ:** הייתי מסיק מכך, שהתפקיד שממלאים הפרדוקסים בהתפתחות השפה הטבעית, הרבה יותר מצומצם מתפקידם בהתפתחות השפות הפורמליות.

**ג:** כן. אם תבדוק את הספרות הפילוסופית שנכתבה על השפה הטבעית, תמצא שעל פרדוקס השקרן נכתבו עשרות ומאות מאמרים. אבל אני חושב שבעיית האמת בשפה היא בעיה מסוג אחר, בעיית השקרן היא בעיה טכנית, לא מהותית.

**מ:** יש הקשרים אחרים, בהם מופיעה בעיית הרמות בשפה הטבעית. לדוגמה: מתכנסים אנשים ואחד מהם אומר: "האנשים שהתכנסו כאן אינם דייקנים." "שני אומר: "האנשים שהתכנסו כאן אינם שומרים על הסדר ועל הנקיון", ואז אומר השלישי: "אלה שדיברו לפני, ביקרו את האחרים מבלי לכלול בכך את עצמם". והרביעי: "זה שדיבר לפני, גם הוא ביקר את האחרים ולא כלל בכך את עצמו". אפשר לקבל שרשרת אין-סופית של דוברים כאלה, שכל אחד מהם חוטא באותה מידה של חוסר התייחסות לעצמו, שבה האשים את קודמיו. דוגמה זו מלמדת, שבשפה הטבעית איננו מוכנים להסדרים כמו בתורת הקבוצות. שם אפשר היה לוותר על כך, שקבוצה תכיל את עצמה כאבר. אבל בשפה הטבעית איננו מוותרים על הדרישה, שהמבקר את האחרים ייחס את ביקורתו גם לעצמו.

**ג:** תופעת הרמות מבוססת, בעצם, על כך, שיש שפה ויש מטה-שפה, ותופעת הרמות קיימת כשיש הירארכיה של מטה-שפות. הבחנה זו אינה טכנית. כל מה שאמרתי הוא שהפרדוקסים מייצגים בעיה טכנית, שאפשר להחליץ ממנה בעזרת פורמליזציה של מושג האמת, עם מספר קטן של רמות. אבל, הבעיה שיש מחשבה ומחשבה על המחשבה, ושאתה יכול כאילו לצאת מן המערכת של עצמך ולהסתכל עליה מלמעלה — זו בעיה של החשיבה האנושית בכלל. וכשהיא משתקפת בשפה טבעית, היא בעיה מהותית.

## הפרדוקס כשוטר

**מ:** יש טוענים, כי בתולדות הלוגיקה הפורמלית מילאו הפרדוקסים רק תפקיד של שוטר, ולא היתה להם חשיבות מהותית: בכל עת שמישהו ניסה לבנות מערכת מושגים באופן בלתי זהיר, צץ פרדוקס והניף דגל אדום, כמו בפרדוקס של ראסל, עד שהיה צורך לתקן את מבנה המערכת או לזנוח אותה לחלוטין. לעומתם טוענים אחרים, שהקונסטרוקציות הפורמליות המוליכות לפרדוקסים, מוליכות גם למסקנות חשובות, לא פרדוקסאליות, בתחומים הלגיטימיים של התורה. גם אתה עומד על כך במאמך, כשאתה מראה שהמבנה המשותף לפרדוקסים הוא גם המכנה של משפטי-יסוד בתורת הקבוצות, כמו משפטו של קנטור (Kantor) האומר, שמספר הנקודות בקטע שאורכו סנטימטר אחד, גדול ממספר כוכבי הרקיע ביקום אין-סופי.

**ג:** נכון, זהו תהליך ה"ליכסון", המונח ביסוד שורה ארוכה של משפטים. הדימוי של שוטר נכון, אך אינו מלא. אין זה מקרה שסתירה התגלתה בכיוונים מסויימים. אין זה דומה לטעות שמישהו עשה, כמו תלמיד שטעה, ובא מישהו ומצלצל בפעמון-אזעקה ואומר: "כאן יש לך טעות". פרדוקסים התעוררו ע"י כך שניסו ללכת בעקבות צורות-מחשבה שהן די טבעיות. וכשאתה מצביע על מגבלות של צורות-מחשבה טבעיות ומקבל מתוך כך גם משפטים על מגבלות של מערכות פורמליות ככלל, זה מראה שלפרדוקסים היה כאן, מבחינת המכנה, תפקיד יותר מעמיק מזה של סתם שוטר, שלא נותן לך להקים מערכת עם סתירות.

## משפט גידל ובעיית היישום העצמי

**מ:** פרדוקס השקרן אכן ממלא תפקיד מרכזי בהוכחת אחד המשפטים המפורסמים של הלוגיקה המודרנית — משפט אי-השלמות של גידל (Goedel). משפט זה אומר, שכל מערכת אקסיומות עבור האריתמטיקה חייבת להיות בלתי שלמה. כלומר, אפשר יהיה תמיד לנסח משפט אריתמטי, שלא ניתן יהיה להכריע באמצעות מערכת האקסיומות אם הוא תקף או לא. וגם אם משפט זה יצורף כאקסיומה

חדשה למערכת, אפשר יהיה לבנות בה משפט חדש, שלא יהיה ניתן להכרעה.

משפט זה של גידל השפיע גם על פילוסופים שלא עסקו בלוגיקה פורמלית, ואשר ראו בו סימן למגבלה בסיסית במחשבת האדם. האם, לדעתך, מצביעים הפרדוקסים ומשפטו של גידל על מגבלה בזו, או שיש לפרש אותם רק בתחום הלוגיקה הפורמלית?

**ג:** תלוי איך אתה מתייחס לעולם המספרים. אתה מנסח טענה על מספרים טבעיים ושואל אם היא מתארת איזו שהיא ממשות והאם יש לה ערך-אמת אובייקטיבי או שערך האמת של הטענה הוא עניין של הסכמה, של קונבנציה. אם זו סתם קונבנציה ומשחק פורמלי בסמלים ועניין של נוחיות, אזי היכן מסתיימת הקונבנציה ומתחילה הממשות? מהו הכיסוי הריאלי שלה בעולם? אם אין לקונבנציה שום כיסוי ריאלי, שום יחס לממשות, איזה עניין יכול להיות לנו בה? ואם יש לקונבנציה על המספרים הטבעיים כיסוי במציאות, אז יש שם, בממשות, אמיתות שבשכלנו אף פעם לא נוכל לתפוש. זוהי משמעות משפטו של גידל עבור מי שחושב שמספרים הם חלק של הממשות.

למשל, כיום לא ידוע אם יש אין-סוף מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2 – כמו 3 ו-5, 7 ו-9, 101 ו-103, או שמספרם של אלה סופי. איש לא הצליח, עדיין, להביא ראיה לכאן או לכאן. יתכן שזו בעיה טכנית והעניין יוכרע במוקדם או במאוחר. אבל מתוך משפטו של גידל אפשר להסיק, שקיימת אפשרות ששאלה זו לא תוכרע אף פעם במסגרת מה שאנו מבינים כיום כתורת המספרים. מי שחושב שמספרים הם דבר ממשי, חייב להניח שקיימת לשאלה זו תשובה אובייקטיבית, שיש או אין, כאופן אובייקטיבי, אין-סוף של זוגות מספרים כאלה, אלא שאנו לא נוכל לדעת זאת. כלומר, מחשבתנו לא תוכל עקרונית לדעת משהו שקיים כמציאות.

**מ:** יש אנשים, ביניהם דאגלס הופשטטר, (Hofstadter), שכתב את הספר "גידל, אשר, באך", הטוענים שההתייחסות עצמית, או מה שאתה מכנה במאמרך "יישום עצמי" כמו משפטו של השקרן, המיושם לגבי עצמו – הוא יסוד מוסד של התודעה. כלומר, שהדבר המאפיין את התודעה האנושית הוא בדיוק, יכולתה להתייחס לעצמה. טול את הדבר הזה – ונטלת את יסוד התודעה.

ג: אין ספק שיש צד כזה כתודעה, אבל אינני בטוח, ואני אף מפקפק אם הוא מיושם בכל מקום שבו התודעה קיימת. אתה יכול לקחת תורה מדעית, כמו המכניקה הקלאסית של ניוטון, שהיא ביטוי של תודעת האדם, ולא תמצא שהיא מיושמת על עצמה. המכניקה של ניוטון עוסקת בגופים ובכוחות, ולא בתורות הדנות בהם, כמוה עצמה. יישום עצמי קיים כדיוק כאותם תחומים של הלוגיקה והמתימטיקה, בהם מנסים לשקף את המערכת בתוך עצמה, גם בטכניקה של מחשבים קיימת התופעה של תוכנית הקוראת לעצמה. תוכנית מחשב בנויה כך, שהיא יכולה לפנות לתוכניות-מחשב אחרות, שכבר נכתבו קודם, ולהשתמש בהן כחלק ממנה. בשפות-מחשב מתקדמות יש אפשרות שהתוכנית תפנה לא רק לתוכניות אחדות, אלא גם לעצמה, וע"י כך היא הופכת חלק מעצמה. כמו הציורים בהם רואים ילד המחזיק בידו קופסה שעליה מצויר ילד המחזיק בידו קופסה, וכך הלאה. מתברר, שאמצעי כזה יכול להיות מועיל וחסכוני. לכן אפשר לומר, שליישום העצמי יש השתקפות גם במישור הטכני.

כרי שתהייה התייחסות עצמית, צריך שהמערכת תשקף את עצמה בתוך עצמה, כמו שהילד משתקף בקופסה שבידו. אבל הקביעה שתוכנית עלולה להכנס ללולאה אין-סופית, לצייר שורה בלתי פוסקת של ילדים המחזיקים קופסאות, או הקביעה שהתוכנית לא תעשה זאת, אינה יכולה להיות בעצמה חלק מן התוכנית. היא שייכת למישור גבוה יותר שבו דנים על תוכניות.

מ: השאלה היא, אם אי-אפשר, כמו בהוכחת משפטו של גידל, לשקף את המישור הגבוה יותר בתוך שפת-המחשב עצמה.

ג: המשפט של גידל עצמו מוכיח, שיש גבול למה שמערכת יכולה לומר על עצמה. זוהי בדיוק הנקודה של אי-שלמות, או מה שנקרא "משפט טארסקי", (Tarsky), האומר, שיש מושגים על מערכת שאינם ניתנים להבעה בתוך המערכת. למשל, מערכת אינה יכולה להגדיר את קבוצת כל הפסוקים האמיתיים של עצמה, בלי להגיע לסתירה. אפשר לומר הרבה דברים על מערכת בתוך מערכת, כמו בתוכנית-מחשב, אבל מה שגידל מראה הוא, שתמיד יש דברים שכדי לומר אותם על המערכת תצטרך לצאת החוצה כדי להגיד אותם. זהו הדבר היוצר את ההרגשה הלא נוחה: אנו מרגישים צורך להשלים את המערכת, וההרגשה הלא נוחה היא שאין שלמות.

מה שקורה בתורת הקבוצות הוא, שדוחפים את מושג חוסר-השלמות למקום ששם אין הוא מפריע להרבה אנשים.

**מ:** האם יש קשר בין עובדה זו לבין התפישות המודרניות על מספרים אינסופיים גדולים מאד. מה שקרוי "קרדינאלים גדולים"?

**ג:** אני חושב שמה שמתמטיקאים עשו, אולי בצורה לא מודעת, כאשר חיפשו אקסיומות, הוא זה: הם ידעו, כמובן, שאי-אפשר לומר את הכל בתוך המערכת, אבל הם ניסו לתאר, כביכול, מערכת שתפוש את הדינמיקה של ההתפתחות של עצמה. כלומר, שבתוך המערכת עצמה ישתקפו, ככל האפשר, תכונות של מערכות שאתה יכול לבנות ממנה בעתיד. וכאן נכנסות האקסיומות על קרדינאלים גדולים. מבחינה פורמלית, כל החשבון הוא לטובת השלילה של האקסיומות האלה. כלומר, המערכת הרבה יותר פשוטה, אלגנטית, אם אתה מקבל את העובדה שאין קרדינאלים גדולים, וגמרנו. אתה מתעסק אז רק בקטע של מספרים המוכרים (כולל המספרים האינסופיים). בכל זאת, אנשים חשבו שע"י הקרדינאלים האלה הם יתפסו תכונות חדשות של מספרים וכתוצאה מזה — ומה שיותר מעניין — יוכלו גם להוכיח משפטים על מספרים הנמצאים ברמה יותר נמוכה, משפטים שאין לגזור אותם בצורה אחרת.

**מ:** האם תקווה זו התממשה?

**ג:** במידה מוגבלת למדי. יש כמה משפטים מסוג זה, אבל הם טכניים מאוד. בינתיים הפך הנושא לשדה-מחקר בפני עצמו בתורת הקבוצות.

## התורות המזרחיות והפילוסופיה הדיאלקטית

**מ:** הייתי רוצה לעבור לתחום שונה בעיון בפרדוקסים ולהשוות, בעזרתך, את התפקיד שהם ממלאים במחשבה המערבית והמזרחית. כמה פילוסופים, ביניהם דאגלאס הופשטר, שכבר הזכרנו, ג'ורג' סמוליאן (Smulian) ואחרים, עמדו על ההקבלה שקיימת בין הפרדוקסים הלוגיים-סמאנטיים של המערב, לבין ביטויים של המחשבה המזרחית, כמו הקואנים של זן: "גנשה אהב לדוג, ולקח את סירתו לנהר נאנדי", שם למד את מלאכת הדייג מאנשים שונים.

מובן, שלא ציפה לתפוס את דג הזהב, התופס את עצמו" (מתוך "שובוגנזו"). כאן יש נסיון לומר את אשר לא ניתן להאמר, ע"י יישום עצמי מפתיע: הדג התופס את עצמו, בניגוד ליתר הדגים, שאנו תופסים אותם. תורת הזן אומרת, שהמחשבה הדיסקורסיבית (מחשבה הדנה ושוקלת) היא מכשול לתפיסה אינטואיטיבית-ישירה של המציאות. יש בזן תהליך שתפקידו להביא את המחשבה למבוי סתום, ע"י שימוש בשאלות כגון: "מה היה פרצופך האמיתי לפני שנולדת?"

ג: זה דבר אחר לגמרי. הפרדוקסים בזן ממלאים תפקיד חינוכי. יש להם שם ערך פסיכולוגי. הם דומים במובן זה למעשים מזעזעים, המיוחסים למורי הזן, כמו קיצוץ פתאומי של אצבעו של התלמיד, במטרה לשנות את המציאות הפנימית שלו, את הווייתו. ברור שבגישה כזו יש ויתור מראש על כל נסיון לתאר את המציאות באמצעות שפה דיסקורסיבית.

**מ:** האם נסיונות כאלה קיימים גם בפילוסופיה המערבית?

ג: מן הסתם יש לחפש אצל מיסטיקנים – שטח שאיני בקי בו. כדאי להזכיר בהקשר זה גם את הדיאלקטיקה ההגליאנית, העושה שימוש יסודי ושיטתי בסתירה. תפישתו של הגל (Hegel) קשורה לרעיונותיו של המיסטיקן הגרמני-נוצרי ביהמה (Boehme), שקדם לו בכ-250 שנה, אבל נקודת-המוצא שלהם שונה.

הגל מנסה לתת תאור של ההתפתחות הדינמית של הלוגיקה, שבה מתוך מושג (תיזה) נוצר, או נגזר, היפוכו (אנטי-תיזה), ומתוך שניהם נוצר דבר שלם יותר, הכולל אותם כאספקטים שלו (סינתיזה). למשל, מתוך מושג ה"יש" נגזר היפוכו — מושג ה"אין", והסינתיזה שלהם הוא מושג "ההיווצרות". או המוסר הוא סינתיזה של חופש-הפרט (התיזה) מצד אחד, ושל התלות של הפרט באחרים (האנטי-תיזה), מצד שני, יש צורך במושג וגם בשלילתו כדי לקבל קירוב טוב יותר לממשות. משתמע מכאן חוסר-האפשרות של שפה פשוטה, הבנויה על חוק הסתירה — שפה, שבה האדם חופשי או תלוי באחרים, אבל לא שניהם כאחד — לשקף מציאות, שהיא עשירה יותר וכוללת ניגודים וסתירות. המציאות, לפי הגל, נבנית בעצמה בתהליך של מעבר ממצב לניגודו, ומשם לרמה חדשה, שבה משתלבים הניגודים.

מבחינה מסויימת זה סוגסטיבי מאוד, אבל, לדעתי, אינו נותן פירות של ממש מעבר לתמונה הכללית של שלמות, שיש בה אספקטים מנוגדים, והנמצאת בתהליך דינמי של היווצרות.

**מ:** כשאתה אומר "פירות של ממש", אתה מתכוון לחשיבה פילוסופית שיטתית?

**ג:** כוונתי לדברים היכולים להאיר נקודות סתומות, לתת סטרוקטורה, מבנה שיאפשר לקיים דיון ולהכריע את העניין כך או אחרת. מבחינה זו יותר פורה לקחת מודל כמו זה של תורת הקבוצות, מודל עשיר למדי, ולשקף בתוכו את התהליך הדינמי. אלא אם כן מטרתך להשיג אינטואיציה, להגיע לתפישה אינטואיטיבית של המציאות, ואינך מעוניין בדיאגרמות, בקביעות או במבחנים. התהליך של הפילוסופיה הדיאלקטית מאוד מסוכן. כיוון שאינך יכול להצביע על נקודות מוגדרות וקבועות, כי הכל נתון בתהליך דינמי, נעשה הדיון פרוץ לכל רוח והופך להיות מלל, עם נטיה למעגליות. להעביר אינטואיציה כזו אפשר בשירה או בעזרת אפוריזמים. אבל, אם אתה מנסה לעשות מזה אידיאולוגיה ולמהול את זה בניסיון לסיסטמטיזציה ולכתוב כרכים עבים, הרי יש סכנה שהדברים יהיו חסרי משמעות.

א. ע.